Çok çözümlü problemler ve Matematiksel düşünme: Wasan Geometrisi örneği

Özlem Çeziktürk
Ataturk Fac. of Ed. Dept. Of Primary Math. Ed.,Marmara University, Turkey

Özet

Wasan geometrisi Japonya'da Edo döneminde ortaya çıkmış çok çözümlü sistematik özellikli problemlerdir. Öretmenler bu problemlere yeterince açık değillerdir ve uygun şekilde değerlendirmemektedirler. Hâlbuki çoklu çözüm yolları bulmak yüksek matematiksel düşünce ile özdeşleşmektedir. Aday matematik öğretmenlerinden matematik ve sanat dersini alan 117 (80 ilk ve 37 orta öğretim) kişiye bir Wasan problemini en az 3 değişik yöntemle çözmeleri istenmiştir. Her kâğıt doğru cevap, farklı çözüm olup olmaması ve orijinallik açısından kodlanmış ve 24 farklı çözüm yolu (e.g. karenin köşegenlerinin eşliği, simetri, teğet uzunluklarının eşliği, yardımcı çizgiler ekleme, kosinüs teoremi, tan (67,5), benzerlikler, üçgen çeşitlerinin özellikleri) görülmüştür. Cevaplar bileşik çözüm, tek yolla çözüm, 1. Çözümler, çok farklı cevaplar, aynı kuralla çözenler ve 5-6 değişik şekilde çözme olarak ayrılmışlardır.

Anahtar kelimeler: Çok çözümlü problemler, Wasan geometrisi, matematiksel düşünme

Multiple solution problems and mathematical thinking: Wasan geometry example

Özlem Çeziktürk
Ataturk Fac. of Ed. Dept. Of Primary Math. Ed.,Marmara University, Turkey

Abstract

Wasan geometry flourished in Edo period of Japan as arty, multiple solutioned and systematic. Teachers are not open and papers are not evaluated. Multiple solutions are seen in parallel with advanced mathematics thinking. 80 middle school and 37 high school pre service math teachers were given a Wasan problem and grouped according to correct answers, different answers, and originality. 24 different answers (equality of diagonals of a square, symmetry, equality of tangent lines, auxiliary lines and auxiliary shapes, cosines' theorem,

*Corresponding author: Address: Ataturk Faculty of Education, Department of Primary Mathematics Education, Marmara University, Istanbul, TURKEY. E-mail address: ozlem.cezikturk@marmara.edu.tr, Phone: +905377653970
Doi: 10.33793/acperpro.02.01.10

tan (67.5), similarities, types of triangles etc.) were detected. Answers were also coded for composite answers (who include two different rules), or simple one ways, first answers, similar solution ways and 5-6 different solutions.

Keywords: Multiple solution tasks, Wasan geometry, mathematical thinking

1.Giriş

Çok çözümlü problemler matematiksel düşünmeyi oluşturabilir. Bu araştırmada farklı sistematik yol izleyen (Öklid bağıntısı, benzerlik, açıortay teoremi) öğrenci cevapları sınıflandırılmıştır. Olası iki ya da üç yolla çözülebilen problemler yerine on değişik yolla çözülebilenler oldukça azdır. Wasan geometrisi gibi sistemsel problemleri içeren problemlerin fark edilip derslerde kullanılması, öğrencileri düşündürecektir. Edo dönemi (1603-1867) Japonya'sında tapınakların, okulların çatılarından sarkan sanatsal, çözümsüz tabletlerde görülmüşlerdir. Sistemsel düşünceyi destekleyen farklı sistemler kadar aynı sistemin içindeki değişik bakış açılarının da gözlemlendiği geometri sorularıdır ([4],[2],[1]). İç içe daireler, kareler, paralel ve kesişen doğrular, üçgenler, elipsler ve bunlar arasındaki ilişkiler soruların temelini oluşturur.

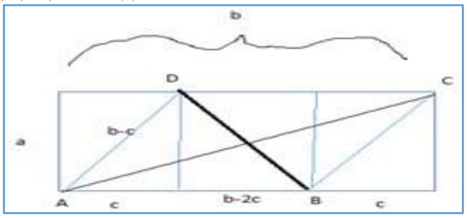
1.1. Matematiksel düşünme ve Wasan geometrisi

Matematiksel düşünce; matematikleştirme ve soyutlaştırma süreçlerini kullanarak matematiksel bir bakış açısı geliştirmektir [5]. Bu araçlar, matematiksel modeller olduğu kadar farklı soru tipleri, çoklu sistemleri içeren problemler de olabilir. Farklı çözüm yolları geliştirmenin bir üst matematik akıl alışkanlığı olduğu belirtilir ve yüksek matematiksel düşünceyi destekleyeceği anlatılır[3]. Öğretmenler ek iş çıkardığı için ve öğrenci kafasını karıştırdığı gerekçesiyle çok çözümlü problemleri kullanmaktan kaçınmaktadırlar. Oysa matematiksel düşüncenin gelişebilmesi için öğrenci matematiğin bir sistemsel yollar dizgesi olduğunu anlamalıdır. Bu bağlamda çok çözümlü problemlerden yardım alınabilir[8]. Hem didaktik hem de teşhis edici özellikleri yanı sıra öğrencilerdeki farklı kavram yanılgılarının, problemli düşünme yollarının ortaya çıkarılabilmesi için de faydalı araçlardır.

1.2. Çok çözümlü problemler

Matematiksel düşünce kişiye özeldir ama özel zenginlikte problemlerle bireysel olarak öğrencilere erişilebilir. Problemin gizemi olmalı, belirli bir metodu olmamalı, farklı seviyelere farklı problemlere yol açmalı, uğraştırmalı, ilginç kısmi çözümleri olmalı, yapısalcı bir yaklaşımla öğrenci bilgisinin üzerine eklemeli, öğrencilere yaratıcı olma şansı tanımalıdır. Bu özellikleri de farklılaştırılmış öğretimin içerik, süreç ve ürün çeşitlemesine paraleldir.

Bir Wasan geometrisi problemi son yıllarda Bilim ve Teknik dergisinde de çıkmıştır. Dikdörtgen bir kâğıdın iki karşıt ucunun üst üste getirilmesi ile oluşan kat izinin (a) ve (b) kenarları cinsinden elde edilmesini sorgular (şekil1). Problemin çözümlerinden en az ikisi birbirinden oldukça farklı sistemik yollar izler. Birinci yolda ardışık iki Pisagor ile çözülebilen soru (birincisi soldaki üst dik üçgenden, ikincisi ortadaki ikinci dik üçgen yardımıyla), ikinci yolda ortada oluşan ABCD eşkenar dörtgeninin köşegenler yardımı ile alan eşitliğinden ve aynı dörtgenin paralelkenar da olmasından yola çıkarak taban çarpı yükseklik alan formülünün eşitliğinden elde edilebilir. Bu işlemler yapıldığında sonuç $(a/b)(\sqrt{(a^2+b^2)})$olur.



Şekil 1. Bilim Teknik 2017 de çıkan Wasan sorusu (Rigby, 1996)

1.3. Çok çözüm üretmek

Araştırma odaklı matematik öğretiminin öğrencileri daha yaratıcı olmaları için destekleyeceğini belirtilir[6]. Yaratıcılığın ana faktörlerinin akıcılık, esneklik ve yenilik olması da dikkate değerdir ve çok çözümlü problemlerle desteklenir. Akıcılık çözüm yolunun içindeki sistemsel bilginin sekteye uğramadan tutarlılıkla verilmesi şeklinde tanımlanabilir. Esneklik ihtimal dışı olan farklı çözüm sistematiklerinin de düşünülebilmesi olarak yorumlanabilir. Yenilik ise şekilde olmayan bir doğrunun, bir şeklin eklenmesi ve sistematiğin farklı yönlerine dikkat çekilmesi olabilir. Araştırmalarda, eskiden üstün yeteneklilikle ilişkilendirilen yaratıcılık kavramı yerine daha genel bir yaratıcılık tanımı düşünülmektedir. Temel içerik konularındaki esnek bilgi, uzun süreli çalışma ve yansıtma (çok özellikle ve farklı önsezi yerine) gibi farklı öğretimsel ve deneysel etkilere açık bir yaratıcılık kavramı düşünüldüğünde bu gibi problemlerin etkisi kaçınılmazdır. Benzer şekilde çok çözümlü problemlerin kullanımına dikkat çekilir[6]&[7].

1.4. Araştırma problemi

Wasan geometrisinden alınmış bir problemi, en az 3 farklı şekilde öğrencilerin çözmesi ve matematiksel dille açıklamaları beklenilmiştir. Soru, ilgili makaleden geleneksel çözümüyle alınmıştır fakat bu makale öğrencilere verilmemiştir [2]. Bu Wasan problemi ile farklı yollar kadar aynı veya benzer yollar da incelenmiştir. Birinci çözüm yolu, orijinal yollar ve çözüm sayısı gibi faktörlere de bakılmıştır. Çözümler matematiksel kavramlar açısından analiz edilmiştir.

Örneklemi 117 aday matematik öğretmeni (80 ilk ve 37 orta) oluşturmuştur (tablo 1). Bunların 16 sı erkek, 111 i kızdır. Bu dengesiz dağılım 2014-2015 girişli matematik öğretmenliği öğrencilerinin dağılımından kaynaklanmaktadır. 3. Sınıf öğrencilerinden matematik ve sanat dersini alan aday öğretmenlerin hepsi örneklemi oluşturmaktadır. Önce problemin kaynakçası paylaşılmadan iki hafta Wasan geometrisi üzerine bilgi verilmiştir.

Tablo 1. Araştırmanın örneklemi

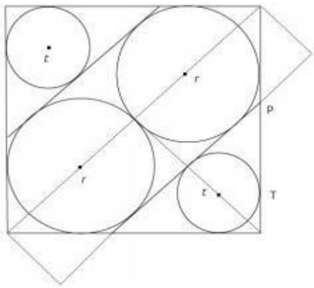
	Erkek	Kız	toplam
Ilk	11	69	80
Orta	5	32	37
Toplam	16	111	117

2. Yöntem

Araştırmanın yöntemi olarak bilimsel araştırma desenlerinden karma yöntem seçilmiştir. Niteliksel olarak fenomonolojik yaklaşım yani çok çözümlü problemlerle olan deneyimin çerçevesi çizilmeye çalışılmıştır, niceliksel olarak ta betimsel istatistikler ve ilişkisel tarama yapılmıştır. Fenomonolojik yaklaşımda araştırmacı deneyimi olduğu gibi vermeye çalışır ve olaya çok etki etmez. Deneyimin çerçevesinin çizilmesi çok daha önemlidir. Betimsel istatistikler de veri nispeten çok olduğundan çerçevenin sayısal etkileri konusunda bilgi vereceği düşünülmüştür.

Araştırma sorusu olarak kullanılan sorunun orijinal Wasan hali görülmektedir(şekil 2 ve 3). Soruda 2 büyük (yarıçap= r)ve 2 küçük daire (yarıçap =t)belli yerlerinden birbirlerine ve karenin iç kenarlarına teğettirler.

Şekil2. Orijinal Sangaku tableti



Şekil 3. Sorunun geometrik gösterimi

Dairelerin yarıçapları kare kenarı cinsinden sorulmaktadır. Sağdaki gösterimde yer alan dikdörtgen orijinal çözümdeki resme eklenilen yardımcı dikdörtgendir ve paralel uzun kenarların eşliğinden yararlanılarak soru çözülür. İlgili makalede modern çözüm olarak isimlendirilmiştir[2].

3. Bulgular

117 cevap kâğıdından toplam 24 değişik sistematik çözüm listelenmiştir. Veri analizi özellikle şu başlıklar altındadır: ilk akla gelen çözümler, kullanılma sıklığı, konu odakları, yaratıcılık (örnek: açıklayıcı bir çizgi eklemek). İlk çözümlerin konulardaki beceri düzeyi ve ön bilgiler ile alakalı olduğu düşünülmektedir. Kullanılma sıklığı, başarılı olunduğu bilinen yolların seçilmesi ile ilgili olabilir. Verilen çerçevenin dışına çıkmak kadar farklı çözüm veya bilinen yollara farklı bakmak ta önemli olmalıdır. En az kullanılan çözüm yolu, sistemsel düşünme, sıralı matematiksel düşünme ve orijinal Wasan çözümüne yaklaşma da önemli olacaktır. Sorunun en basit çözümü karenin köşegen eşliğindendir. Öyleyse, $r+(r\sqrt{2})= r+t+(t\sqrt{2})$ yazılabilir. Buradan $t=r(2-\sqrt{2})$elde edilir. Makalede ayrıca modern çözüm olarak şekil 3 te gösterilen dikdörtgenin çizilmesi önerilir[2]. Bu dikdörtgende karşılıklı kenarların eşliğinden yararlanılır. Yani makalede sadece 2 çözüm yolu gösterilmiştir. Soruya, 3 çözümden fazla çözüm getirenler, daha yaratıcı düşünülebilir. En az 3 çözüm getirenler ilklerde % 9 da kaldıkları gözlemlenirken, ortalar % 14 olmuştur. Burada genellemede dikkatli olmak gerekse de, orta öğretim aday matematik öğretmenlerinin daha yaratıcı olma eğilimindedir. Bilinen yaratıcılık testlerinde, yaratıcılığın önceden belirlenmiş

süreçlerin dışına çıkma eğilimi olarak görüldüğü düşünülürse, bu fikir desteklenmektedir. Aynı çözüm yoluna takılıp kalanlar da olmuştur (% 17,5 ilk, % 8 orta).

Karede köşegenlerin eşliğinden sonra bir de ikizkenar üçgenin kenar eşliğini kullandıklarında farklı çözüyormuş izlenimine kapıldıkları gözlemlenmiştir. 45-45-90 dik üçgeninin özelliğini kullanarak farklı şekilde soruyu çözdüklerini beyan eden aday öğretmenler de oldu.

Tablo 2. Çözüm yolları çeşitliliği

1.Karenin köşegenlerinin eşliği	13. Dışarda büyük kare oluşturarak
2.45-45-90 üçgeninden	14. Çizilen paralellerle oluşturulan eşlikten
3. Öklid bağıntısı	15. Tan 67,5 =1+ kok2
4. Alanların eşliğinden	16. Kosinüs teoreminden
5. Kare kenarı çarpı kok 2=köşegen	17. Simetri, orta noktanın teğet olması
6. Teğet uzunluklarının eşliğinden	18. Sin alfa (üçgen içi kenar oranında)
7. Dikdörtgenin iki uzun kenarının eşliğinden	19. Aşağıdaki küçük dikdörtgenden
8. Benzerlikten	20. Karenin bir kenarının ölçüsünden
9. İkizkenar dik üçgenin kenar eşliğinden	21. Sadece Pisagor
10. Açıortay teoreminden	22. Eşkenar dörtgenin altındaki üçgen
11. Köşegenlerdeki üçgenin kenar eşliğinden	23. Teğet dikmelerinin uzunluğundan
12. Paralelkenardaki r-t, rt, t dik üçgeninden	24. Teğet formülünden

Son 5 çözüm yol ilklerden çıkarken, orta öğretim cevap çeşitliliği ilk 19 çözüm yolu ile kısıtlı kalmıştır(tablo 2). Bu ilköğretim aday matematik öğretmenlerinin sayıca fazla olması ile açıklanabilir. Yüzdelere vurulduğunda ilköğretim aday öğretmenlerinden %30 değişik çözüm, orta öğretim aday öğretmenlerinden % 50 değişik çözüm çıkmıştır. Çözüm çeşitliliği tablo 2 de görülebilir. Bu da soruların sistemsel matematik düşüncesini tetiklediği noktasını göstermektedir. Kompozit çözüm, tek bir yolla çözümü göremeyen öğrencilerin 2 veya 3 yöntemi bir arada kullanarak ürettikleri çözümlerdir. İlköğretim aday öğretmenlerinde üçte bir; orta öğretim matematik aday öğretmenlerin de beşte biri kadar olduğu belirlenmiştir. Tablo 3 te en sık karşılaşılan çözümler sırasıyla listelenmiştir. Sırasıyla karenin köşegen eşliği, benzerlik, sonra ise modern çözümü görülmektedir. Ortalarda daha karmaşık sistemsel düşüncelere (Öklid bağıntısı gibi) girildiğini fakat ilköğretimde fark edilen dikdörtgenin iki kenarının eşliği için gerekli olan ek çizimin fark edilmediğini anlıya bilinir.

Tablo 3. Çözüm sıklığı

	1.çözümler	2.çözümler	3.çözümler
Ilk	28(kare köşegen eş) 9(köşegen üçgeni eş kenar) 8 (benzerlik)	26(benzerlik) 13(karenin köşegen eşliği)	5(dikdörtgenin kenar eş) 4(kare kenar.√2=köşegen)
Orta	19(kareköşegen) 5(benzerlik) 3(kare kenarı.√2=köşegen)	11(kare köşegen) 8(benzerlik) 8(kare kenar.√2=köşegen)	6(45-45-90 üçgeni) 5(Öklid bağıntısı)

Tablo 4 te ise en orijinal çözümler belirtilmiştir. İlklerin ek dikme, paralel çizme gibi yaratıcı ögeleri, ortaların ise daha çok teoremlere; trigonometrik ve alan bağıntılarına dikkat çektikleri görülmektedir.

Tablo 4. Orijinal çözümler

	1.çözüm	2.çözüm	3.çözüm
Ilk	-karenin kenar ölçüsünden -Çizilen paralellerle oluşan eşlikten	-teğete çizilen dikmelerin uzunluğundan -aşağıdaki küçük dikdörtgenin iki kenarından	-teğet uzunlukları eşliği -eşkenar dörtgenin altındaki üçgen - sadece Pisagor
orta	-Kosinüs teoremi Tan 67.5 = 1+ kok2	-dikdörtgenin eş kenar -simetri (teğet orta nokta) -dışarıda büyük kare oluşturmak	-alanların eşliğinden -açıortay teoreminden

Kompozit çözümler karmaşık düşünen öğrencilerin cevapları hakkında bilgi verecektir. Çünkü onlar her konudan birazla soruları çözmeye çalışmışlardır. Eğer sadece Pisagor kullanarak soruyu çözebildiklerini fark etselerdi çözerlerdi ama onlar Pisagor ile simetri konusunu ve dikdörtgenin iki uzun kenarının eşliğindeki bilgilerini birleştirip karmaşık cevaplar vermişlerdir. Kompozit çözümler, öğrencilerin bilgi düzeyi ve neyi ne kadar anladıkları konusunda da bilgi verebilir.

Kompozit çözümler (ilk)

- (Pisagor +simetri (teğet orta nokta)+ dikdörtgenin kenar eşliğinden)
- (Pisagor +açıortay teoremi+ dikdörtgenin kenarının eşliğinden)
- (karenin köşegen eşliği +teğet uzunluklarının eşliği+ benzerlik)
- (kare kenarı, kok2 =köşegen, 45-45-90 üçgeni+ teğet eşliği)

Kompozit çözümler (orta)

- (karenin köşegen eşliği+ benzerlik)
- (Kare kenarı. Kok2 =köşegen+ teğet uzunlukları eşliği)
- (benzerlik +simetri –orta noktanın teğet olması)
- (dışarıda büyük kare oluşturarak +benzerlik)

İlginçtir ki orta öğretim matematik öğretmen adayları kompozit çözümlerde 2 den fazla çözüm yolunu bir araya getirmemişlerdir. İlk mat aday öğretmenler Pisagor teoremi, açıortay teoremi gibi teoremleri de kompozit çözüme katarken, orta mat aday öğretmenler kare ve benzerlik konusundan çok öteye gitmemişlerdir.

Tablo 5 te en basit çözüm (karenin köşegen eşliği) ve modern çözümün (dikdörtgenin kenar eşliği) arasında ki–kare istatistiğine ve iki çözümün bir arada kullanılıp kullanılmadığına bakılmıştır. $P<0.05$ düzeyinde iki çözümün birbiri ile ilişkili olduğu görülmüştür. Verilen frekanslar, basit çözümü kullananların çoğunlukla modern çözümü kullanmadığı yönünde olmuştur(tablo 5).

Tablo 5. Basit çözüm ile modern çözümün ilişkisi

gruplar		Modern çözüm Yok	Var	Toplam	Ki-kare istatistiği	Df	P
Karenin köşegen eşliği	Yok	37	1	38	6,416	1	0,011
	Var	63	16	79			
	toplam	100	17	117			

Tablo 6 da ise öğretmen adayının bulunduğu programa göre kompozit çözümün varlığı veya yokluğuna bakılmıştır. Ve $p>0,067$ olduğundan bağlantılı çıkmamıştır. P nin 0.05 e yakınlığı nedeniyle frekanslar, kompozit çözümlerin total sayı içinde oldukça az sayıda olduğunu göstermektedir (tablo 6). Örneklem sayısı arttırılsaydı, daha bağlantılı çıkma durumu olabilirdi diye düşünüle bilir.

Tablo 7 de, $p<0.05$ anlamlılık düzeyinde ki karenin anlamlı olduğunu görülmektedir. Bu da ortaların basit çözümü daha az kullandıklarını gösterebilir. Yani ilkler karenin köşegen eşliği çözümünü daha sıklıkla kullanmışlardır.

Tablo 6 Düzeye göre kompozit çözüm ilişkili midir?

gruplar		Kompozit çözümün Yok	Var	Toplam	Ki-kare istatistiği	Df	P
Düzey	İlk	49	30	79	3,350	1	0,067
	Orta	30	8	38			
	Toplam	79	38	117			

Tablo 7 Düzeye göre basit çözüm fark gösterir mi?

gruplar		Karenin köşegen eşliği Yok	Var	Toplam	Ki-kare istatistiği	Df	P

düzey	İlk	32	47	79	7,148	1	0,008
	Orta	6	32	38			
	toplam	38	79	117			

Ki-karelerden, düzeye göre modern çözümün, düzeye göre yaratıcılığın, kompozit çözümle yaratıcılığın, kompozit çözümle basit çözümün, kompozit çözümle modern çözümün, yaratıcılıkla hem basit çözümün hem de modern çözümün bağlantılı olmadıkları gözlemlenmiştir.

4. Tartışma ve Sonuç

Ortaların gördüğü matematik dersleri ve öğrenci sayılarının azlığı yaratıcılıklarının gelişmesine yol açmış olabilir. Aynı çözümü seçenler tüm örneklemin yaklaşık % 15idir ve karenin köşegeninden tümünü çıkarmaya çalışmıştır. Sistemsel düşünceden uzak oldukları veya kolayına kaçtıkları da söylenebilir. Yalnız basit çözümler bazen zekâ ile bağdaştırılabilir. Ortaların ileri matematik konularında daha bilgili oldukları ve kullandıkları görülmüştür. İlklerin bağlantılardan ziyade, çizimde görülmeyen ama ek bir paralel doğru veya şekil ile daha farklı çözümlere dikkat çektikleri belirlenmiştir. Van Hiele geometriksel düşünce düzeyleriyle de alakalı olabilir. Bu araştırmada bu yönde bir analiz yapılmamıştır. Son düzeyin eksikliği yapılan araştırmalar ile de görülmüştür [1].

Kompozit çözümler ise aday öğretmenlerin parça bilgilerini birleştirerek sonuca ulaşmaya çalıştıklarını göstermektedir. Konu başlıklarının tekiyle bile bu sorunun çözülebildiğini fark etmemişlerdir. Ayrıca, kompozit çözüm tercih edenler çoğunlukla diğer çözümlerde de kompozit cevaplar vermiştir. Bu öğrencilerin kafasının karışık olduğu veya sistemi tam anlamadıkları olarak yorumlanabilir.

Basit çözümü kullananlar modern çözümle alakalı çıkmamıştır. Çözümü herkesin bulmuş olabileceğini düşünüp farklılık aramış olabilirler. Çok karmaşık düşünen öğrenciler basit çözümü fark etmemiş te olabilirler. Burada özellikle her iki çözümü de aynı anda yapmış kişi var mı diye bakılmıştır. İlk de 8 ortada da 4 öğretmen adayı çıkmıştır. Bir ihtimal makaleye ulaşmış da olabilirler. Düzeye göre basit çözüm ilişkili çıkmıştır. Kompozit çözümle ilişkisine bakılınca istatiksel olarak anlamlı bir sonuç çıkmamıştır. Burada düzeyin gene de etkili olduğu düşünülebilir. Kompozit çözüm kullananların ilklerin yarıya yakını ve ortaların ise sadece beşte bir sayıda kaldığı gözlemlenmiştir. Kompozit çözüm kullanmamalarına bakarak, ortaların anlayarak çözdükleri düşünülebilir. İlk aday matematik öğretmenlerin basit çözüme ağırlık vermesi ise daha farkında olmaları şeklinde ama aynı zamanda ilk buldukları çözüme bağlı kalmaları şeklinde de açıklanabilir.

6.Kaynakça

[1]Cezikturk-Kipel O, Özdemir AŞ. Wasan Geometrisi Öğretiminin van Hiele Geometrik Düşünce Düzeylerine uygulaması ve öğretmen adaylarının öğrenme durumlarına etkileri. Avrasya Eğitim ve Literatür Dergisi.2016;4: 1727.

[2]Hosking RJ. Solving sangaku: A traditional solution to a nineteenth century japanese temple problem, J. Hist. Math, 2010,1 Mart 2018 https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1702/1702.01350.pdf adresinden edinilmiştir.

[3]Leikin R. Challenging Mathematics with Multiple Solution Tasks and Mathematical Investigations in Geometry, (.Eds.) Y. Eli.et.al. , Transforming Mathematics Instruction: Multiple Approaches and Practices, Advances in Mathematics Education,, 2014;pp. 59-80.

[4]Rigby JF. Traditional japanese geometry, Mathematical Medley, 1996;4145.

[5]Schoenfeld A. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (reprint) Journal of Education, 2016;196: 2,1-39.

[6]Silver E. Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing, *ZDM*, 1997;313: 75-80.

[7]Stupel M, Ben-Chaim D. Using multiple solutions to mathematical problems to develop pedagogical and mathematical thinking: A case study in a teacher education program, Investigations in Mathematics Learning, 2017;9:2, 86-108.

[8]Waynberg, AL, Leikin R. Multiple solutions for a problem: a tool for evaluation of mathematical thinking in geometry, CERME 6: France;2009.